Universidad Andrés Bello

Solemne 3 - 2013

P.4] Considere el cubo $\Omega = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$ en $\mathbb{R}^3$. Suponga que las caras $x=0$ y $x=a$ son adiabaticas, es decir, no permiten el flujo de calor, mientras que aquellas en $y=0$ e $y=a$ son mantenidas a $T=0$.

si las caras restantes satisfacen:

$$T(x,y,0) = 0 \quad y \quad T(x,y,a) = T_0 \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right]$$

Determinar la Temperatura en Ω, [heller una expresion para $T(x,y,z)$]

Solución:

La ecuación para la temperatura $(+) \to T(x,y,z)$ es:

$$\frac{d}{dt} T(x,y,z,t) = c\, \Delta T(x,y,z,t) \quad ; \quad c: \text{coeficiente de conducción calorica.}$$

se considera cte en el problema

Al estar en un regimen estacionario, se tiene que: $\frac{dT(x,y,z,t)}{dt} = 0$, es decir no depende del tiempo $(t) \Rightarrow T(x,y,z,t) \equiv T(x,y,z)$

Así:

$$\Delta T(x,y,z) = 0$$

es decir: $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] T(x,y,z) = 0$

utilizando, el método de separacion de variables. suponemos lo siguiente sobre la función $T(x,y,z)$:

$$T(x,y,z) = X(x)\, Y(y)\, Z_1(z)$$

Ahora, aplicamos el laplaciano a $T(x,y,z)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[X(x)\, Y(y)\, Z_1(z)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[X(x)\, Y(y)\, Z_1(z)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[X(x)\, Y(y)\, Z_1(z)]$$

$$Y(y)\, Z_1(z)\, \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\, Z_1(z)\, \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)\, Y(y)\, \frac{\partial^2 Z_1(z)}{\partial z^2}$$

2) simplificaremos la notacion de las funciones y las derivadas:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) \equiv X'' \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) \equiv Y'' \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_1(z) \equiv Z_1''$$

Escaneado con CamScanner

3)

Así, $\Delta T = 0$, si y solo si:

$$X''YZ_1 + XY''Z_1 + XYZ_1'' = 0$$

Asumiendo $T(x,y,z) \neq 0$ (función no nula). Dividimos por $T = XYZ_1$, y queda.

$$\frac{X''YZ_1}{XYZ_1} + \frac{XY''Z_1}{XYZ_1} + \frac{XYZ_1''}{XYZ_1} = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z_1''}{Z_1} = 0 \quad \text{.. (I)}$$

Tomamos α y β como constantes de separación, y suponemos lo siguiente

$$\frac{X''}{X} = -\alpha^2 \text{ .. (1)} \quad \text{y} \quad \frac{Y''}{Y} = -\beta^2 \text{ .. (2)}$$

Reemplazemos (1) y (2) en (I):

$$-\alpha^2 - \beta^2 + \frac{Z_1''}{Z_1} = 0 \Rightarrow \frac{Z_1''}{Z_1} = \alpha^2 + \beta^2 \text{ .. (3)}$$

Para un "α" dado, la solución de la ecuación (1) es:

$$X_\alpha(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \operatorname{sen}(\alpha x) \text{ .. (a)}$$

La condición de adiabaticidad en $x = 0$ y $x = a$, nos indica que el flujo de calor en dichos posiciones es nulo ($= 0$). Lo cual se puede entender como que el gradiente de temperatura en una dirección perpendicular a la superficie de la pared es cero.

Entonces: $\vec{\nabla} T \cdot \hat{x} = 0$

como ambas paredes son en coordenadas perpendiculares a x (plano) entonces el vector perpendicular es el eje $\hat{x}$.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} T = \frac{\partial}{\partial x}(XYZ_1)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}(XYZ_1)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}(XYZ_1)\hat{z}$$

$$= YZ_1\frac{\partial X}{\partial x}\hat{x} + XZ_1\frac{\partial Y}{\partial y}\hat{y} + XY\frac{\partial Z_1}{\partial z}\hat{z}$$

Ahora:

$$\vec{\nabla} T \cdot \hat{x} = \left[YZ_1\frac{\partial X}{\partial x}\hat{x} + XZ_1\frac{\partial Y}{\partial y}\hat{y} + XY\frac{\partial Z_1}{\partial z}\hat{z}\right] \cdot \left[\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}\right]$$

$$= YZ_1\frac{\partial X}{\partial x}$$

{las otras componentes se anulan al multiplicarse por cero}

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

$$\Rightarrow \quad YZ \frac{\partial X}{\partial x} \equiv YZ \frac{dX}{dx}$$

luego: $YZ \frac{dX}{dx} = 0$

esto se cumple para $x=0$ y $x=a$, para todos los valores de Y, Z

Por lo anterior, basta con analizar $\frac{dX}{dx}$

$$\frac{dX_\alpha}{dx} = 0$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{dX_\alpha}{dx} = -A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}(\alpha x) + B_\alpha(\alpha)\cos(\alpha x)$$

Usando las condiciones de borde Tenemos:

En $x=0$

$$-A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}[\alpha(0)] + B_\alpha(\alpha)\cos[\alpha(0)] = 0$$

$$-A_\alpha(\alpha)[0] + B_\alpha(\alpha)[1] = 0$$

$$\boxed{B_\alpha(\alpha) = 0}$$

Entonces, la función X_α queda como: $X_\alpha(x) = A_\alpha \cos(\alpha x)$

y su derivada queda como: $X'_\alpha(x) = -A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}(\alpha x)$

Usando la segunda condición:

En $x=a$

$$-A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}[\alpha(a)] = 0$$

Asumiendo $A_\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 0$, Tenemos: $\text{sen}[\alpha(a)] = 0$

Por lo cual los valores permitidos de $\alpha(a)$ son *multiplos de* π

Entonces:

$$\alpha(a) = n\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_n = \frac{n\pi}{a}}$$

Por lo cual la función $X_\alpha(x)$ queda como:

$$X_\alpha(x) = A_\alpha \cos\left[\frac{n\pi}{a}x\right]$$

Escaneado con CamScanner

Ahora, trabajaremos con la ecuacion (2):

Para un "β" fijo la ecuación $\frac{Y''}{Y} = -\beta^2$ tiene como solución

$$Y_\beta(y) = A_\beta \cos(\beta y) + B_\beta \operatorname{sen}(\beta y)$$

La condicion de borde impone que en las caras $y=0$ e $y=a$ $T(x,y,z) = XYZ_1 = 0$. Por ello estudiamos los valores de "β" tal que:

$$Y_\beta(0) = 0 \quad y \quad Y_\beta(a) = 0$$

Para $y=0$

$$A_\beta \cos[\beta(0)] + B_\beta \operatorname{sen}[\beta(0)] = 0$$

$$A_\beta [1] + B_\beta [0] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\beta = 0}$$

Entonces, la función $Y_\beta(y)$ queda como: $Y_\beta(y) = B_\beta \operatorname{sen}[\beta y]$

Ahora **Para $y=a$**

$$B_\beta \operatorname{sen}[\beta(a)] = 0$$

Asumiendo $B_\beta \neq 0$, Tenemos $\operatorname{sen}[\beta(a)] = 0$ por ello se tiene:

$$\beta(a) = m\pi \Rightarrow \boxed{\beta_m = \frac{m\pi}{a}}$$ son los valores admisibles de β.

Resumiendo, Tenemos:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{a}, \quad X_{\alpha_n}(x) = A_{\alpha_n} \cos\left[\frac{n\pi}{a}x\right]$$

$$Y_{\beta_m}(y) = B_{\beta_m} \operatorname{Sen}\left[\frac{m\pi}{a}\right]$$

Volviendo a $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z_1''}{Z_1} = 0$, Tenemos lo siguiente: en base a los resultados hallados:

$$\frac{X''_{\alpha_n}}{X_{\alpha_n}} = -\alpha_n^2 \quad y \quad \frac{Y''_{\beta_m}}{Y_{\beta_m}} = -\beta_m^2$$

Reemplazando esto en la ecuacion (3) Tenemos: Para m y n fijos

$$\frac{Z_1''}{Z_1} = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Reemplazando las expresiones de α_n y β_m, Tenemos:

$$\frac{Z_1''}{Z_1} = \left[\frac{n\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\pi}{a}\right]^2 (n^2 + m^2)$$

Podemos llamar a esto $Z_{m,n}(z) \Rightarrow Z_{m,n}(z) = \left[\frac{\pi}{a}\right]^2 (n^2+m^2)$

Recordemos que las condiciones de borde sobre z son:

$z=0$: $T(x,y,0) = 0$.

$z=a$: $T(x,y,a) = T_0 \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right]$

Sin embargo, podemos expresar una solución general, antes de aplicar las condiciones de borde en z, de la siguiente manera:

$$T(x,y,z) = \sum_{m,n} A_{m,n} Z_{m,n}(z) X_{\alpha_n}(x) Y_{\beta_m}(y) \qquad A_{m,n} \text{ es una constante}$$

Para continuar, reemplazamos las expresiones de $X_{\alpha_n}(x)$ e $Y_{\beta_m}(y)$

$$\Rightarrow T(x,y,z) = \sum_{m,n} A_{m,n} Z_{m,n}(z) \cos\left[\frac{n\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{a}y\right] \quad \cdots (*)$$

En este punto, aún no tenemos una expresión para $Z_1(z)$, sin embargo podemos utilizar las condiciones de borde con la expresión (*) y obtener algunos resultados.

Para $z=a$

$$\sum_{m,n} A_{m,n} Z_{m,n}(a) \cos\left[\frac{n\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{a}y\right] = T_0 \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right]$$

Comparando las expresiones de sen y cos en ambos lados, notamos que necesariamente: $n=3$ y $m=4$. Por lo tanto los demas Terminos en la sumatoria pierden valor o sentido.

Tambien, de la comparacion de expresiones, tenemos que:

$$A_{3,4} Z_{3,4}(a) = T_0$$

Escaneado con CamScanner

Entonces, la expresión (*) queda como:

$$T(x,y,z) = A_{3,4}\, Z_{3,4}(z) \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right]$$

Para $z=0$

$$A_{3,4}\, Z_{3,4}(0) \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right] = 0$$

asumiendo que las expresiones de $\cos(3\pi/a\, x)$ y $\operatorname{sen}(4\pi/a\, y)$ son distintas de cero, tenemos

$$A_{3,4}\, Z_{3,4}(0) = 0$$

Usando los resultados que acabamos de obtener, podemos expresar lo siguiente:

$$\frac{Z''_{3,4}(z)}{Z_{3,4}(z)} = \left[\frac{\pi}{a}\right]^2 [3^2 + 4^2]$$

$$= \left[\frac{\pi}{a}\right]^2 5^2$$

Debemos resolver $\dfrac{Z''_{3,4}}{Z_{3,4}} = \dfrac{\pi^2}{a^2}[5^2]$, para que cumpla $Z_1(a) = T_0$ y $Z_1(0) = 0$

> nota: Como la $A_{3,4}$ no afecta significativamente a las expresiones buscadas, podemos ignorarla sin embargo, debe tenerse presente que no esta siendo anulada.

Recordando los cosh y senh., cuyas expresiones son:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ademas: $\cosh(0) = 1$ y $\operatorname{senh}(0) = 0$

Tambien: $\dfrac{d}{dx}[\cosh(x)] = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$ y $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh}(x)] = \cosh(x)$

Con base en lo enterior, podemos expresar la solución de $\dfrac{Z''_{3,4}}{Z_{3,4}} = \dfrac{\pi^2}{a^2}5^2$

como: $Z_{1n}(z) = A_n \cosh(nz) + B_n \operatorname{senh}(nz)$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Recordemos que Tenemos nuevas condiciones de borde:

$Z_n(0) = 0$ y $Z_n(a) = T_0$

Para z=0

$$A_n \cosh[n(0)] + B_n \operatorname{senh}[n(0)] = 0$$

$$A_n[1] + B_n[0] = 0$$

$$\boxed{A_n = 0}$$

Entonces: $Z_n(z) = B_n \operatorname{senh}(nz)$

Ahora, analizaremos: $Z_n''/Z_n'' = (\pi/a)^2 [3^2+4^2]$, para ello debemos calcular la derivada segunda.

$\Rightarrow Z_n' = B_n(n)\cosh(nz) \Rightarrow Z_n'' = B_n(n^2)\operatorname{senh}(nz)$

Reemplazamos:

$$\frac{B_n(n^2)\operatorname{senh}(nz)}{B_n \operatorname{senh}(nz)} = \left[\frac{\pi}{a}\right]^2 5^2$$

$$n^2 = \left[\frac{\pi}{a}5\right]^2$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{5\pi}{a}}$$

La función $Z_n(z)$ va quedando como:

$$Z_n(z) = B_n \operatorname{senh}\left[\frac{5\pi}{a} z\right]$$

nota: podemos obviar el subindice "n", ya que se ha determina que es un valor fijo

y, por lo tanto nuestra solución, va Teniendo la forma de:

$$T(x,y,z) = B \operatorname{senh}\left[\frac{5\pi}{a} z\right] \cos\left[\frac{3\pi}{a} x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a} y\right]$$

Faltaría determinar "B", para ello usaremos la condición:

$Z(a) = T_0$, Tambien podemos usar la condicion original. Veamos embas casas

Escaneado con CamScanner

6|

2⇒ condicion nueva $Z(a) = T_0$

$$\Rightarrow B \operatorname{senh}\left[\frac{5\pi}{a}(a)\right] = T_0 \Rightarrow B \operatorname{senh}[5\pi] = T_0$$

$$\Rightarrow B = \frac{T_0}{\operatorname{senh}[5\pi]}$$

2⇒ condicion original: $T(x,y,a) = T_0 \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right]$

$$\Rightarrow B \operatorname{senh}\left[\frac{5\pi}{a}(a)\right] \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right] = T_0 \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right]$$

$$\Rightarrow B \operatorname{senh}[5\pi] = T_0$$

$$\Rightarrow B = \frac{T_0}{\operatorname{senh}[5\pi]}$$

Llegamos al mismo resultado por ambos caminos

$$\boxed{B = \frac{T_0}{\operatorname{senh}[5\pi]}}$$

Concluimos, que la solución general $T(x,y,z)$ tiene la siguiente forma:

$$\boxed{T(x,y,z) = \frac{T_0}{\operatorname{senh}(5\pi)} \operatorname{senh}\left[\frac{5\pi}{a}z\right] \cos\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{a}y\right]}$$

Escaneado con CamScanner